Alap fatranszformátorok I

Vágvölgyi Sándor

Oyamaguchi [3], Dauchet és társai [1] és Engelfriet [2] bebizonyították hogy egy tetszőleges alap termátíró rendszerről eldönthető hogy összefolyó-e. Mindannyian megadtak egy-egy eljárást. Mind a három eljárásnak az inputja egy R alap termátíró rendszer és az outputja 'igen' ha R összefolyó 'nem' ha R nem összefolyó. Mind Dauchet és társai [1] mind Engelfriet [2] eljárása faautomatákat használ fel. Ezért áttekintjük ezt a két eljárást.

Fogalmak, jelölések

Relációk. A $\rightarrow \subseteq A \times A$ halmazt az A halmaz feletti bináris relációnak nevezzük. $a \rightarrow b$ jelöli az $(a, b) \in \rightarrow$ tartalmazást. $\rightarrow^*$ jelöli $\rightarrow$ reflexív, tranzitív lezártját, és $\leftrightarrow^*$ jelöli $\rightarrow$ reflexív, tranzitív, szimmetrikus lezártját. $\leftarrow$ jelöli $\rightarrow$ inverzét. $\leftrightarrow^*$ ekvivalencia reláció. Tetszőleges $\rightarrow_1$ és $\rightarrow_2$ A fölötti bináris reláció esetén $\rightarrow_1 \circ \rightarrow_2$ jelöli a $\{(a, c) \mid \exists(b \in A)\, a \rightarrow_1 b \text{ és } b \rightarrow_2 c\}$ relációt, azaz $\rightarrow_1$ és $\rightarrow_2$ kompozícióját.

Azt mondjuk hogy a $\to$ reláció

- megáll ha nincsen végtelen $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots$ sorozat,
- összefolyó (konfluens) ha tetszőleges $a_1, a_2, a_3 \in A$ esetén, ha $a_1 \to^* a_2$ és $a_1 \to^* a_3$, akkor létezik egy $a_4 \in A$ úgy hogy $a_2 \to^* a_4$ és $a_3 \to^* a_4$, azaz $\leftarrow^* \circ \to^* \subseteq \to^* \circ \leftarrow^*$,
- konvergens ha megáll és összefolyó.

Az $a \in A$ elem irreducibilis $\to$-ra nézve ha nincsen $b \in A$ úgy hogy $a \to b$. Ismert hogy tetszőleges $\to$ konvergens reláció esetén, a $\leftrightarrow^*$ ekvivalencia reláció tetszőleges C osztályának van pontosan egy irreducubilis a eleme úgy hogy minden $b \in C$ esetén, $b \to^* a$. Azt mondjuk hogy a a $\to$-normálformája b-nek.

Fák. Egy véges Σ halmazt rangolt ábécének nevezünk, ahol minden Σ-beli elemnek van rangja. Minden $m \geq 0$: Σ_m jelöli Σ azon elemeit amelyek rangja m. Feltesszük hogy $\Sigma_0 \neq \emptyset$. $X = \{ x_1, x_2, \dots \}$ változók halmaza. X_n jelöli az első n változó halmazát, azaz $\{ x_1, \dots, x_n \}$-t, $n \geq 0$.

Minden $n \geq 0$ esetén, $T_{\Sigma,n}$ - a Σ feletti X_n-fák halmaza- az a legszűkebb U halmaz amelyre

(i) $\Sigma_0 \cup X_n \subseteq U$ and

(ii) $f(t_1, \ldots, t_m) \in U$ ahol $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$, és $t_1, \ldots, t_m \in U$.

$T_{\Sigma,0}$ a Σ feletti alap fák halmaza. $\overline{T}_{\Sigma,n} \subseteq T_{\Sigma,n}$ definíciója: $t \in \overline{T}_{\Sigma,n}$ ha minden $x \in X_n$ pontosan egyszer fordul elő t-ben.

Fa helyettesítés: tetszőleges $t \in T_{\Sigma,n}$, $(n \geq 0)$, és $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma$ fák esetén a $t[t_1, \ldots, t_n]$ fát úgy kapjuk a t fából hogy x_i minden egyes előfordulását a t_i fával helyettesítjük, $1 \leq i \leq n$.

Algebrák. Legyen Σ egy rangolt ábécé. A Σ algebra egy $\mathbf{B} = (B, \Sigma^{\mathbf{B}})$ rendszer, ahol B egy nemüres halmaz, az algebra tartóhalmaza, és $\Sigma^{\mathbf{B}} = \{ f^{\mathbf{B}} \mid f \in \Sigma \}$ B feletti műveletek Σ-indexelt halmaza. Minden $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$, esetén $f^{\mathbf{B}}$ egy leképezés B^m-ből B-be.

Egy $\delta \subseteq B \times B$ relációt tartalmazó legkisebb $\mathbf{B}$ feletti kongruenciát δ *kongruencia lezártjá*nak nevezzük.

A Σ feletti alaptermek $\mathbf{TA} = (T_\Sigma, \Sigma)$ Σ algebráját tekintjük. Minden $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$ és $t_1, \ldots, t_m \in T_\Sigma$ esetén, $f^{\mathbf{TA}}(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$.

Alap termátíró rendszer. Legyen Σ egy rangolt ábécé. Egy $R \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ véges halmazt Σ feletti alap termátíró rendszernek nevezünk. R elemeit szabályoknak nevezzük és $u \to v$ alakban írjuk. A $\to_R \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ átírási reláció definíciója: tetszőleges $s, t \in T_\Sigma$ esetén, $s \to_R t$ akkor és csak akkor ha létezik egy $u \to v$ szabály R-ben és $c \in \overline{T}_{\Sigma,1}$ környezet úgy hogy $s = c[u]$ and $t = c[v]$. $\leftrightarrow_R^*$ az R kongruencia lezártja a **TA** term algebrán.

A $\Rightarrow_R \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ párhuzamos átírási reláció definíciója: tetszőleges $s, t \in T_\Sigma$ esetén, $s \Rightarrow_R t$ akkor és csak akkor ha létezik egy $c \in \overline{T}_{\Sigma,k}$, $k \geq 1$, környezet és $u_1 \to v_1$, $u_2 \to v_2$, …, $u_k \to v_k$ szabályok R-ben úgy hogy $s = c[u_1, \ldots, u_k]$ és $t = c[v_1, \ldots, v_k]$. Fennáll hogy $\to_R \subseteq \Rightarrow_R \subseteq \to_R^*$.

Azt mondjuk hogy R összefolyó ha $\to_R$ összefolyó. Azt mondjuk hogy R megáll ha $\to_R$ megáll. Tegyük fel hogy az R alap termátíró rendszer megáll és összefolyó azaz konvergens. A $\leftrightarrow_R^*$ kongruencia reláció tetszőleges C osztályának van pontosan egy irreducibilis s eleme úgy hogy minden $t \in C$ esetén, $t \to_R^* s$. Azt mondjuk hogy s a $\to_R$-normálformája t-nek. Most tetszőleges t alap termre addig írunk át az R alap termátíró rendszerrel (azaz addig haladunk a $\to_R$

reláció mentén) amíg megkapjuk t-nek a $norm$ normálformáját. Tegyük fel hogy el akarjuk dönteni tetszőleges t, t' alap termekre hogy a $\leftrightarrow_R^*$ kongruencia relációnak ugyanabban az osztályában vannak-e. A t, t' alap termek a $\leftrightarrow_R^*$ kongruencia relációnak ugyanabban az osztályában vannak akkor és csak akkor ha a $norm$ és $norm'$ normálformájuk megegyezik. Ezért kiszámoljuk a $norm$ és $norm'$ normálformájukat, és összehasonlítjuk őket.

Fél faautomata és faautomata. Legyen Σ egy rangolt ábécé. A Σ feletti fél faautomata egy A alap termátíró rendszer a $\Sigma \cup AH$ rangolt ábécé felett. Itt AH - az A állapothalmaza - nulla rangú szimbólumokból áll és $AH \cap \Sigma = \emptyset$. A szabályai az alábbi két típusúak:

$$f(a_1, \ldots, a_n) \to a$$

ahol $f \in \Sigma_n$, $n \geq 0$, $a, a_1, \ldots, a_n \in AH$ és

$$a_1 \to a_2,$$

ahol $a_1, a_2 \in AH$. A második típusú szabályokat λ szabályoknak nevezzük. A λ szabályokat ki tudjuk küszöbölni.

Az $\mathcal{A} = (\Sigma, AH, A, F)$ rendszert faautomatának nevezzük, ahol A egy Σ feletti fél faautomata az AH állapothalmazzal, és $F \subseteq AH$ a végállapotok halmaza.

$$L(\mathcal{A}) = \{\, t \in T_\Sigma \mid (\exists a \in F) \;\; t \overset{*}{\underset{A}{\to}} a \,\}$$

az $\mathcal{A}$ által felismert fanyelv. A faautomaták által felismert fanyelveket felismerhető fanyelveknek nevezzük. Tetszőleges $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ faautomatákról el tudjuk dönteni hogy $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{B})$ teljesül-e.

Alap fatranszformátor. A Σ feletti A, B fél faautomatákból álló (A, B) párt alap fatranszformátornak nevezzük (AFT, röviden). Az (A, B) által indukált $\tau(A, B) \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ fatranszformáció definíciója: Minden $p, q \in T_\Sigma$ esetén, $(p, q) \in \tau(A, B)$ akkor és csak akkor ha létezik $u \in \overline{T}_\Sigma(X_n), n \geq 0$, környezet és $z_1, \ldots, z_n, z'_1, \ldots, z'_n \in T_\Sigma$ fák és $a_1, \ldots, a_n$ közös állapotai A-nak és B-nek úgy hogy
$p = u[z_1, \ldots, z_n] \rightarrow^*_A u[a_1, \ldots, a_n]$ és
$q = u[z'_1, \ldots, z'_n] \rightarrow^*_B u[a_1, \ldots, a_n]$,
ahol $z_i \rightarrow^*_A a_i$ és $z'_i \rightarrow^*_B a_i$, $1 \leq i \leq n$.

Példa. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{ \$ \}$, $\Sigma_2 = \{ f \}$. Páros fa: páros sokszor fordul elő benne a \$ szimbólum. Páratlan fa: páratlan sokszor fordul elő benne a \$ szimbólum.
Az A fél faautomata állapotai: $AH = \{ 0, 1 \}$, A szabályai:
$\$ \rightarrow 1, \quad f(0, 0) \rightarrow 0, \quad f(0, 1) \rightarrow 1, \quad f(1, 0) \rightarrow 1,$
$f(1, 1) \rightarrow 0.$
A $(\Sigma, AH, A, \{ 0 \})$ faautomata a páros fák halmazát ismeri fel. A $(\Sigma, AH, A, \{ 1 \})$ faautomata a páratlan fák halmazát ismeri fel.
A B fél faautomata állapotai: $AH_B = \{ 0', 1 \}$, B szabályai:

$\$ \to 1,\quad f(0', 0') \to 0',\quad f(0', 1) \to 1,\quad f(1, 0') \to 1,$
$f(1, 1) \to 0'$.
A $(\Sigma, AH_B, B, \{\, 0' \,\})$ faautomata a páros fák halmazát ismeri fel. A $(\Sigma, AH_B, B, \{\, 1 \,\})$ faautomata a páratlan fák halmazát ismeri fel.

$(f(\$, f(\$, f(\$, \$))), f(\$, \$)) \in \tau(A, B)$, mert
$f(\$, f(\$, f(\$, \$))) \to_A f(\$ f(\$, f(1, \$)))$
$\to_A f(\$, f(\$, f(1, 1))) \to_A f(\$, f(\$, 0)) \to_A$
$f(\$, f(1, 0)) \to_A f(\$, 1)$ és
$f(\$, \$) \to_B f(\$, 1)$.
Ugyanakkor $(f(\$, \$), f(f(\$, \$), f(\$, \$)) \notin \tau(A, B)$, mert
$f(\$, \$) \to_A f(1, \$) \to_A f(1, 1) \to_A 0$
$f(f(\$, \$), f(\$, \$)) \to_B^* f(0', 0') \to_A 0'$,
és a fenti két átírási sorozatban nem fordul elő ugyanaz a fa.
$\tau(A, B)$ azokból a (p, q) párokból áll amelyekre létezik $u \in \overline{T}_\Sigma(X_n), n \geq 0,$ környezet és $z_1, \ldots, z_n$, $z_1', \ldots, z_n' \in T_\Sigma$ páratlan fák úgy hogy

$$p = u[z_1, \ldots, z_n] \text{ és } q = u[z_1', \ldots, z_n'].$$

Az eredmények

Dauchet és társai [1] és Engelfriet [2] megmutatták az alábbi eredményt.

Tétel 1 *Tetszőleges R alap termátíró rendszerről eldönthetjük hogy összefolyó-e.*

Sorra megnézzük a két bizonyítást.

Első bizonyítás. (Dauchet és munkatársai [1]).

Tétel 2 *Tetszőleges R alap termátíró rendszer esetén, meg tudunk konstruálni egy (A, B) AFT-t úgy hogy $\rightarrow_R^* = \tau(A, B)$.*

Bizonyítás. Két lemmát igazolunk.

Lemma 3 *Minden R alap termátíró rendszerhez meg tudunk konstruálni egy (A, B) AFT-t úgy hogy $\Rightarrow_R = \tau(A, B)$. Ekkor az is fennáll hogy $\rightarrow_R \subseteq \tau(A, B) \subseteq \rightarrow_R^*$.*

Bizonyítás. Egy példán mutatjuk be a bizonyítást.

$\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{ a \}$, $\Sigma_2 = \{ f \}$. R alap termátíró rendszer szabályai:

$f(a, b) \rightarrow f(b, a)$ és $a \rightarrow f(a, a)$.

A $\Rightarrow_R$ reláció indukálható az (A, B) Σ feletti alap fa-transzformátorral: $AH_A = \{ q_a, q_b, q_{f(a,b)}, w_{f(b,a)}, w_{f(a,a)} \}$ és $AH_B = \{ w_a, w_b, w_{f(b,a)}, w_{f(a,a)} \}$

A szabályai: $a \to q_a$, $b \to q_b$, $f(q_a, q_b) \to q_{f(a,b)}$, $q_{f(a,b)} \to w_{f(b,a)}$, $q_a \to w_{f(a,a)}$.

B szabályai: $a \to w_a$, $b \to w_b$, $f(w_b, w_a) \to w_{f(b,a)}$, $f(w_a, w_a) \to w_{f(a,a)}$.

$\square$

Lemma 4 *Tetszőleges (A, B) AFT esetén meg tudunk konstruálni egy (C, D) AFT-t úgy hogy $\tau(A, B)$ reflexív, tranzitív lezártja egyenlő $\tau(C, D)$-vel.*

A fenti kettő lemmából kapjuk a 2. tételt.

$\square$

Lemma 5 *Tetszőleges (A, B) AFT esetén meg tudunk konstruálni egy (C, D) AFT-t úgy hogy $\tau^{-1}(A, B) = \tau(C, D)$.*

Bizonyítás. Legyen $C = B$ és $D = A$.

$\square$

Lemma 6 *Tetszőleges (A, B) AFT és (C, D) AFT esetén meg tudunk konstruálni egy (E, F) AFT-t úgy hogy $\tau(A, B) \circ \tau(C, D) = \tau(E, F)$.*

Lemma 7 *Tetszőleges R alap termátíró rendszer esetén, meg tudunk konstruálni (C, D) AFT-t és (E, F) AFT-t úgy hogy*

$\leftarrow_R^* \circ \rightarrow_R^* = \tau(C, D)$ *és*

$\rightarrow_R^* \circ \leftarrow_R^* = \tau(E, F)$

Bizonyítás. A 2. tétel és a fenti lemmák alkalmazásával megkonstruáljuk a (C, D) AFT-t és (E, F) AFT-t.

$\square$

Lemma 8 *Legyen R egy alap termátíró rendszer. Akkor meg tudunk konstruálni egy (C, D) AFT-t és egy (E, F) AFT-t úgy hogy R összefolyó akkor és csak akkor ha $\tau(C, D) \subseteq \tau(E, F)$.*

Bizonyítás. R összefolyó definíció szerint ha $\leftarrow_R^* \circ \rightarrow_R^* \subseteq \rightarrow_R^* \circ \leftarrow_R^*$. Az előző lemmából kapjuk a lemmát.

$\square$

Feladatunk az AFT-k által indukált transzformációk tartalmazásásának az eldöntése. Bevezetjük a 2 aritású $\#$ szimbólumot. Adott (A, B) Σ feletti AFT által indukált $\tau(A, B)$ transzformációhoz hozzárendeljük a $\Sigma \cup \{\#\}$ feletti $\mathcal{L}(A, B)$ fanyelvet. Legyen $(s, t) \in \tau(A, B)$ tetszőleges! Akkor vegyük a legnagyobb közös környezetüket, u-t azaz legyen
$u \in \overline{T}_{\Sigma,m}$, $m \geq 0$,
$s = u[s_1, \ldots, s_m]$ és $t = u[t_1, \ldots, t_m]$,
s_i gyökere különbözik t_i gyökerétől $i = 1, \ldots, m$.
Tegyük bele $\mathcal{L}(A, B)$-be az $u[\#(s_1, t_1), \ldots, \#(s_m, t_m)]$ fát.

Lemma 9 *Tetszőleges (A, B) Σ feletti AFT és (C, D) Σ feletti AFT esetén $\tau(A, B) \subseteq \tau(C, D)$*

akkor és csak akkor ha $\mathcal{L}(A, B) \subseteq \mathcal{L}(C, D)$*.*

Lemma 10 *Tetszőleges* (A, B) Σ *feletti AFT esetén meg tudunk konstruálni egy* $(\Sigma \cup \{\#\}, AH_C, C, \{ok\})$ *faautomatát amely az* $\mathcal{L}(A, B)$ *fanyelvet ismeri fel.*

Bizonyítás.

$AH_C = AH_A \times \Sigma \cup AH_B \times \Sigma \cup AH_A \times AH_B \cup \{ok\}$

C fél fautomata szabályai

(1) $f((a_1, g_1), \ldots, (a_m, g_m)) \to (a, f)$ ahol az $f(a_1, \ldots, a_m) \to a$ szabály eleme $A \cup B$-nek és $f, g_1, \ldots, g_m \in \Sigma$,

(2) $\#((a, f), (a', g)) \to (a, a')$, ahol $f \neq g$ és $f, g \in \Sigma$,

(3) $f((a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)) \to (a, b)$ ahol
$f(a_1, \ldots, a_m) \to a$ eleme A-nak,
$f(b_1, \ldots, b_m) \to b$ eleme B-nek,

(4) $(a, a) \to ok$, ahol $a \in AH_A \cap AH_B$,

(5) $f(ok, \ldots, ok) \to ok$.

$\square$

Tétel 1 *Tetszőleges R alap termátíró rendszerről eldönthetjük hogy összefolyó-e.*

Bizonyítás.

• Megkonstruáljuk (C, D) AFT-t és (E, F) AFT-t úgy hogy R összefolyó akkor és csak akkor ha $\tau(C, D) \subseteq \tau(E, F)$.

• Megkonstruáljuk az $\mathcal{L}(C, D)$ felismerhető fanyelvet felismerő $\mathcal{G}$ faautomatát.

• Megkonstruáljuk az $\mathcal{L}(E, F)$ felismerhető fanyelvet felismerő $\mathcal{H}$ faautomatát.

Az R alap termátíró rendszer összefolyó akkor és csak akkor ha $L(\mathcal{G}) \subseteq L(\mathcal{H})$.

• Eldöntjük hogy $L(\mathcal{G}) \subseteq L(\mathcal{H})$ teljesül-e.

$\square$

Az 1. tétel második bizonyítása (Engelfriet [2]). A $\rightarrow_R$, $\rightarrow_R^*$, $\Rightarrow_R$, stb. fogalmakat értelmezzük a végtelen R alap termátíró rendszerre éppen úgy ahogy a véges alap termátíró rendszerre.

Azt mondjuk hogy R egy *kiterjesztett* alap termátíró rendszer Σ felett ha R véges részhalmaza a $FIT_\Sigma \times FIT_\Sigma$ halmaznak, ahol FIT_Σ jelöli a Σ feletti felismerhető fanyelvek halmazát. Tekintsük az S alap termátíró rendszert Σ felett ahol S az összes olyan $l \rightarrow r$ szabályból áll ahol $l \in BAL$ és $r \in JOBB$ valamely $(BAL, JOBB) \in R$-re. Megjegyezzük hogy S lehet végtelen is hiszen BAL, $JOBB$ tetszőleges Σ feletti felismerhető fanyelvek. Definíció szerint legyen $\rightarrow_R = \rightarrow_S$. Amikor a $\Rightarrow_R$ párhuzamos átírási relációt tekintjük, akkor R-t ground fatranszformátornak nevezzük. A ground fatranszformátor korábbi definíciójával ekvivalens ez az új definíció.

Legyen Σ egy rangolt ábécé, és $\# \notin \Sigma$ egy kettő aritású szimbólum. Tetszőleges $t \in T_{\Sigma \cup \{\#\}}$ esetén definiáljuk a $left(t) \in T_\Sigma$ és $right(t) \in T_\Sigma$ fákat. Szemléletesen $left(t)$ úgy áll elő t-ből hogy minden egyes $\#$-et törlünk a jobb részfájával együtt. $right(t)$ úgy áll elő t-ből hogy minden egyes $\#$-et törlünk a bal részfájával együtt.

$left(f(t_1, \ldots, t_k)) = f(left(t_1), \ldots, left(t_k))$,
$left(\#(t_1, t_2)) = left(t_1)$
$right(f(t_1, \ldots, t_k)) = f(right(t_1), \ldots, right(t_k))$,
$right(\#(t_1, t_2)) = right(t_2)$

Minden $t \in T_{\Sigma \cup \{\#\}}$ meghatároz egy párt: $trans(t) = (left, right)$. Tetszőleges $L \subseteq T_{\Sigma \cup \{\#\}}$ meghatároz egy fatranszformációt:

$$trans(L) = \{ trans(t) \mid t \in L \}.$$

Legyen R egy kiterjesztett alap termátíró rendszer. A $t \in T_{\Sigma \cup \{\#\}}$ fa R-nek egy derivációs fája ha t minden $\#(t_1, t_2)$ alakú részfájára, $right(t_1) \to left(t_2)$ R-nek egy szabálya. D_R az R derivációs fáinak a halmaza.

Példa. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{\, a, b, p, q \,\}$, $\Sigma_2 = \{\, \sigma \,\}$. Az R alap termátíró rendszer szabályai.

$a \to p$,
$\sigma(p, p) \to p$,
$\sigma(p, p) \to q$,
$q \to \sigma(q, b)$,
$q \to b$

Tekintsük az alábbi derivációt:

$\sigma(\sigma(a, a), a) \to_R \sigma(\sigma(p, a), a)$
$\to_R \sigma(\sigma(p, p), a)$
$\to_R \sigma(q, a)$
$\to_R \sigma(\sigma(q, b), a)$
$\to_R \sigma(\sigma(b, b), a)$

A fenti derivációnak megfelelő t derivációs fa

$t = \sigma(\#(\sigma(\#(a, p), \#(a, p)), \#(q, \sigma(\#(q, b), b))), a)$,
ahol $left(t) = \sigma(\sigma(a, a), a)$ és $right(t) = \sigma(\sigma(b, b), a)$.

Tétel 11 *Minden R kiterjesztett alap termátíró rendszer esetén $trans(D_R) = \to_R^*$.*

Tétel 12 *Minden Σ feletti R kiterjesztett alap termátíró rendszer esetén meg tudunk kosntruálni egy $\mathcal{A}$ faautomatát $\Sigma \cup \{\, \# \,\}$ felett úgy hogy $L(\mathcal{A}) = D_R$.*

Tétel 13 *Minden R kiterjesztett alap termátíró rendszer és L felismerhető fanyelv esetén meg tudunk* *konstruálni egy olyan $\mathcal{A}$ faautomatát hogy*

$$L(\mathcal{A}) = \xrightarrow[R]{*}(L) = \{ s \in T_\Sigma \mid (\exists t \in L)\ t \xrightarrow[R]{*} s \}.$$

Bizonyítás. A 11. tétel alapján

$$\xrightarrow[R]{*}(L) = right(D_R \cap left^{-1}(L)).$$

Az előző tételből kapjuk hogy meg tudunk konstruálni egy $\mathcal{B}$ faautomatát $\Sigma \cup \{ \# \}$ felett úgy hogy $L(\mathcal{B}) = D_R$. Lineáris homomorfizmus fatranszformátorokkal indukálhatók a $left$ és $right$ leképezések. A felismerhető fanyelvek osztálya megkonstruálható módon zárt a lineáris homomorfizmusok melletti kép és a teljes inverz kép képzésére, továbbá a metszet képzésre.

□

Tétel 2 *Minden R kiterjesztett alap termátíró rendszerhez meg tudunk konstruálni egy olyan Q ground fatranszformátort amelyre $\rightarrow_R^* = \Rightarrow_Q$.*

Bizonyítás. Legyen $Q = \{ (\leftarrow_R^*(BAL), \rightarrow_R^*(JOBB)) \mid (BAL, JOBB) \in R \}$. Az előző tétel alapján megkonstruáljuk Q-t. Igazolható hogy $\rightarrow_R^* = \Rightarrow_Q$.

□

Tehát ismét bebizonyítottuk a 2. tételt. Innen az 1. tétel második bizonyítása az első bizonyításhoz hasonlóan megy.

References

[1] Comon, H., Dauchet, M., Gilleron, R., Jacquemard, F., Lugiez, D., Löding, C., Tison, S., Tommasi, M.: *Tree Automata Techniques and Applications*, http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata, 2007.

[2] J. Engelfriet, Derivation Trees of Ground Term Rewriting Systems. Information and Computation, **152** (1999) 1-15.

[3] M. Oyamaguchi, The Church-Rosser property for ground term rewriting systems is decidable, Theoretical Computer Science, **49** (1987) 43-79.